

旋转薄壳自由振动的精确解法

北京航空航天大学 李琳**

【摘要】提出一种计算具有齐次边界条件的旋转薄壳的特征值和特征函数的精确解法。这一方法仍需借用数值法求解8阶行列式所对应的频率方程。其精确意义是与用数值法求解梁的超越频率方程而获得梁振动频率精确解意义等同的。用此方法,本文给出了两端简支(ss)、一端固定一端自由(cf)以及一端固定一端简支(cs)柱壳的自振频率随柱壳长细比的变化,并与解析解(ss)、试验值(cs)及其它方法进行了比较。

主题词: 旋转壳体 自由振动 特征值

分类号: O 325

研究旋转薄壳振动特性对旋转薄壳零件的设计至关重要。较为通用的计算方法有限元法、传递矩阵法^[1]、梁特征函数法^[2]。前两种方法的精度与结构的离散程度有关;后者的精度与旋转壳的长细比有关。工程人员在选用一种方法时希望对结果的精度心中有数。然而事实上除了简支柱壳外,其它边界条件的柱壳乃至一般的锥壳都没有精确的解可供参考。本文提出一种具有齐次特性边界条件的旋转壳振动特性的计算方法,目的在于给出这类旋转壳的精确解,为工程上的近似算法提供参考。本方法仍需借用数值法求解8阶行列式所对应的频率方程。这里的精确意义是与用数值法求解梁的超越频率方程而获得梁振动频率精确解的意义等同的。

1 运动方程的求解

旋转薄壳的位移基本变量有3个:轴向位移 u ,切向位移 v 和法向位移 w 。根据DONNEL理论,可以以 u, v, w 为未知函数建立柱壳(或锥壳)平衡方程,这是一个高阶微分方程组。利用旋转薄壳内力、内力矩与位移的关系还可将DONNEL的平衡方程(即高阶微分方程组)转化为8个一阶微分方程的等价形式^[1],相应的8个参数变量为 $u, v, w, X, N_x, M_x, Q, P$ 。其中 Q 为切向等效剪力; P 为法向等效剪力; $X = \partial v / \partial x$; N_x 为轴向内力; M_x 为轴向弯矩。

对于旋转薄壳,其内力、位移在周向均具有周期变化特性,其解具有如下形式: $u(x, \theta, t) = U(x) \cos m \theta \sin \omega t$, $v(x, \theta, t) = V(x) \sin m \theta \sin \omega t$, $w(x, \theta, t) = W(x) \cos m \theta \sin \omega t$, $N_x(x, \theta, t) = \bar{N}_x(x) \cos m \theta \sin \omega t$, $M_x(x, \theta, t) = \bar{M}_x(x) \cos m \theta \sin \omega t$, $N_{x\theta}(x, \theta, t) = \bar{N}_{x\theta}(x) \sin m \theta \sin \omega t$, $M_{x\theta}(x, \theta, t) = \bar{M}_{x\theta}(x) \sin m \theta \sin \omega t$ 。其中: $\bar{N}_{x\theta}$ 和 $\bar{M}_{x\theta}$ 分别为中面剪切力和扭矩。将上述位移和内力表达式代入DONNEL平衡方程或与其等价的一阶微分方程组可将问题归结为一维解析函数组的求解,与DONNEL平衡方程等价的一阶微分方程组成为^[1]:

$$d\{z\}/dx = [T]\{z\} \quad (1)$$

按一般常系数线性微分方程的求解方法可设 $\{z\} = \{z_0\}e^{\lambda x}$ 。代入方程组(1)可得特征根方

程。根据平衡方程组(1)的特性,特征根方程是一个 8 次方程。尽管此特征根方程在某些情况下可降阶为 4 次,但是 4 次方程仍无解析解,也就是说我们无法得到特征根的解析式。这一解析式代表了特征根与振动频率的关系。没有这一解析式,我们就无法写出具有 8 个常数的位移(和内力)解析函数表达式,这是旋转柱壳(也是锥壳)求解的难点所在。为此提出采用特征根方程和频率方程的同步求解方法。将 $\{z\} = \{z_0\}e^{\lambda x}$ 代入方程组(1)得:

$$(\lambda[I] - [T])\{z_0\} = \{0\} \quad (2)$$

式中 $[I]$ 为单位对角矩阵。从形式上看,式(2)是一个关于矩阵 $[T]$ 的 8 阶标准特征值问题,但是由于 $[T]$ 矩阵中含有未知频率 ω ,实质上式(2)是代表 λ 和 ω 之间关系的特征根方程。如前所述这是一个 8 次方程,构成了柱壳解析解的难点。利用式(2)的这种特性不妨先假设一个 ω 使式(2)成为可解的特征值问题。解此特征值问题可得 λ 的 8 个根 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 及对应的 8 组特征向量 $\{z_0\}_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 。于是就能写出方程组(1)的通解表达式:

$$\{z\} = \sum_{i=1}^8 C_i \{z_0\}_i e^{\lambda_i x} = [z_0] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ e^{\lambda_8 x} \end{bmatrix} \{c\} \quad (3)$$

式中: $[z_0]$ 为模态矩阵, $C_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 为根据边界条件确定的组合系数。

显然 $\{z\}$ 的表达式(3)是满足方程组(1)的。但是 $\{z\}$ 要成为微分方程组(1)的解还必须满足边界条件。希望通过选取一系列的 ω 来达到目的。然而这样做必须解决一个问题,即如何才能知道根据假设的 ω 算得的通解 $\{z\}$ 是否满足边界条件。因为在式(3)中组合系数 C_i 是未知的,它要通过边界条件来确定。而根据假设的 ω 每算得一组 $\{z_0\}_i$ 和 λ_i , 代入(3)式,根据边界条件都能获得一组 $\{C\}$ 。

为了解决这个问题,来分析一下根据边界条件确定组合系数的过程。设 $\{z^s\}_I$ 为 $x = x_0$ 时状态向量 $\{z\}$ 中的已知分量构成的向量。一般 $\{z^s\}_I$ 为四维向量; 又设 $\{z^s\}_R$ 为 $x = x_n$ 时状态向量 $\{z\}$ 中的已知分量构成的向量,一般 $\{z^s\}_R$ 亦为四维向量。根据(3)式应有:

$$\{z^s\}_I = [z_0^s]_I \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x_0} \\ \vdots \\ e^{\lambda_8 x_0} \end{bmatrix} \{c\}, \quad \{z^s\}_R = [z_0^s]_R \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x_n} \\ \vdots \\ e^{\lambda_8 x_n} \end{bmatrix} \{c\} \quad (4)$$

式中: $[z_0^s]_I$ 和 $[z_0^s]_R$ 分别为由模态矩阵 $[z_0]$ 中对应 $\{z^s\}_I$ 各分量的行构成的矩阵和对应 $\{z^s\}_R$ 各分量的行构成的矩阵。 $[z_0^s]_I$ 和 $[z_0^s]_R$ 均为 4×8 阶。令 $\{z^s\} = \begin{Bmatrix} \{z_0^s\}_I \\ \{z_0^s\}_R \end{Bmatrix}$ 则(4)式可综合为

$$\{z^s\} = \begin{bmatrix} [z_0^s]_I & e^{\lambda x_0} \\ [z_0^s]_R & e^{\lambda x_n} \end{bmatrix} \{c\} = [\mathcal{Q}(\lambda)] \{c\} \quad (5)$$

这是一个以 $\{c\}$ 为未知量的线性方程组,其中 $\{z^s\}$ 为已知。解此线性方程组(5)即可得通解组合系数 $\{c\}$ 。这里要注意,对于齐次边界条件有 $\{z^s\} = \{0\}$, 这时要使 $\{c\}$ 有非零解,必须满足系数矩阵 $[\mathcal{Q}(\lambda)]$ 奇异。而矩阵 $[\mathcal{Q}(\lambda)]$ 中的 λ 是通过特征根方程(2)依赖于频率 ω 的,因此最终使矩阵 $[\mathcal{Q}(\lambda)]$ 奇异的 ω 就是所要求的系统的自振频率。事实上由边界条件构成的方程: $[\mathcal{Q}(\lambda)] \{c\}$

$= \{0\}$, 恰为微分方程组(1)的特征值问题, 而行列式 $|\mathcal{Q}(\lambda)| = 0$ 正是系统的频率方程。满足频率方程的 ω 是系统的固有频率, 而将满足特征值问题的组合系数 $\{c\}$ 代入通解表达式(3)就得到了系统的特征函数(即振型)。

综上所述, 求解过程可归纳为两步: (1) 每假设一个 ω 解特征值问题(实质上是特征根方程)(2), 获得 λ 和 $\{z_0\}_i (i = 1, 2, \dots, 8)$; (2) 计算行列式 $\Delta = |\mathcal{Q}(\lambda)|$; 使 $\Delta = 0$ 所对应的 ω 即是所求的自振频率。它所对应的 λ , $\{z_0\}_i$ 和 $\{c\}$ 构成了特征函数(振型):

$$\{z\}_j = \sum_{i=1}^8 c_{ij} \{z_0\}_{ij} e^{\lambda_{ij} x} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

上述的第一步对应于微分方程的特征根方程的求解; 第二步对应于超越频率方程的求解。因此这一方法实质上是特征根方程和频率方程的同步求解法。

2 [T] 矩阵中数值分散的处理

如果将状态向量中的 8 个分量分为位移分量组 $\{z_d\}$ 和内力分量组 $\{z_f\}$, 即 $\{z\} = \begin{Bmatrix} z_d \\ z_f \end{Bmatrix}$, 则

对应的 $[T]$ 也可分成 4 块: $[T] = \begin{bmatrix} T_{dd} & T_{df} \\ T_{fd} & T_{ff} \end{bmatrix}$ 。不难发现 $[T_{df}]$ 和 $[T_{fd}]$ 中元素的数值相差很大, 前者与材料的弹性模量 E 成反比, 后者与材料的弹性模量 E 成正比。例如对于航空发动机的结构材料一般 E 的量纲为 $10^{10} - 10^{11}$ Pa, 因此 $[T_{df}]$ 和 $[T_{fd}]$ 中元素的数量级就有可能相差 10^{20} , 这将大大降低特征值问题(2)的求解精度。这一问题可利用相似矩阵的性质解决。

设 $\{z_0\} = [a]\{Y\}$, $[a]$ 为可逆方阵。代入方程(2), 得: $\lambda\{Y\} = [a]^{-1}[T][a]\{Y\}$ 或 $\lambda\{Y\} = [T_a]\{Y\}$; $[T_a] = [a]^{-1}[T][a]$, 所以 $[T_a] \sim [T]$ (T_a 相似于 T)。根据相似矩阵特征值相等的特性, 可以选取特殊的 $[a]$, 使 $[T_a]$ 中的数值分布较 $[T]$ 有很大改善, 然后通过求 $[T_a]$ 的特征值

获得 $[T]$ 的特征值。为此令 $[a] = \begin{bmatrix} a_d & 0 \\ 0 & a_f \end{bmatrix}$ 则 $[T_a] = \begin{bmatrix} T_{dd} & a_d^{-1} a_f T_{df} \\ a_f^{-1} a_d T_{fd} & T_{ff} \end{bmatrix}$

由于 T_{df} 中元素的数值很小, T_{fd} 中元素的数值很大, 所以可设 $a_d = I$ (单位矩阵), $a_f = 10^p I$, p 为一适当常数。 $[T_a] = \begin{bmatrix} T_{dd} & 10^p T_{df} \\ 10^{-p} T_{fd} & T_{ff} \end{bmatrix}$, 而相应的特征向量为

$$\{z_0\} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 10^p I \end{bmatrix} \{Y\} = \begin{Bmatrix} Y_d \\ 10^p Y_f \end{Bmatrix}$$

3 不同边界条件柱壳的自振频率

为了验证计算方法和计算程序的正确性, 首先对具有解析解的两端简支柱壳进行计算。对于两端简支柱壳可以直接写出既满足位移边界条件又满足运动微分方程的位移函数

$$u = \sum_n \sum_m A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos m\theta \sin \omega t, \quad v = \sum_n \sum_m B_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin m\theta \sin \omega t$$

$$w = \sum_n \sum_m C_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos m\theta \sin \omega t$$

其中: A_{nm} 、 B_{nm} 、 C_{nm} 为待定常数, L 是柱壳轴向长度。将 u 、 v 、 w 代入运动方程, 可导出一个 3 阶特征值问题。这个 3 阶特征值问题的解(给出特征值、固有频率)就是用以比较各种近似算法的参考值。实际上这个 3 阶特征值问题也必须借助数值运算才能求解。以下称这一方法的解为解析解, 本文介绍的方法的解为广义精确解, 两种方法给出的结果示于表 1。其中 m 为周波数,

n 为振动阶数, $R/h=500$, $\omega=\lambda\sqrt{E/[\rho R^2(1-\mu^2)]}$ 。

表 1 两端简支柱壳的自振频率

$L/n\cdot R$	$m=1$		$m=2$		$m=4$		$m=6$	
	解析解	广义精确解	解析解	广义精确解	解析解	广义精确解	解析解	广义精确解
0.5	0.928	0.928	0.862	0.862	0.673	0.673	0.496	0.496
1.0	0.845	0.845	0.652	0.652	0.354	0.354	0.204	0.204
2.0	0.573	0.573	0.327	0.327	0.124	0.124	0.0641	0.0641
5.0	0.186	0.186	0.0759	0.0759	0.0241	0.0240	0.0231	0.0228
10	0.0591	0.0591	0.0206	0.0206	0.0107	0.00993	0.0207	0.0205

如前所述, 这里的解析解也是借助了数值运算得出的。因此两种结果的差别来自于解 3 阶特征值问题和解 8 阶特征值问题的数值运算, 而没有方法本身引起的误差。

表 2 一端固定、一端自由的柱壳自振频率(Hz)

m	方法	1	2	3	4
2	试验	293.0	827.0	1894	—
	Shama	319.4	1018	2358	3762
	本文	352.7	952.5	2194	3635
4	试验	1451	1503	1673	2045
	Shama	1466	1525	1730	2156
	本文	1499	1510	1758	2153
6	试验	3429	3476	3546	3667
	Shama	3470	3509	3587	3725
	本文	3407	3512	3548	3726

文献[2]中给出了几种基于梁特征函数的近似算法与试验值的比较。这里选其中一种较好的方法(Shama 算法)与本论文方法比较。首先来看一下具有试验值的算例: 一端固定、一端自由的柱壳, 长 $L=502\text{ mm}$, 半径 $R=63.5\text{ mm}$, 壁厚 $h=1.63\text{ mm}$, 材料常数 $E=2.1\times10^{11}\text{ Pa}$, $\mu=0.28$, $\rho=7.8\times10^3\text{ kg/m}^3$ 。其自振频率示于表 2。

根据文献[2]的分析和比较, 基于梁特征函数的近似算法的精度随周波数 m 以及柱壳的有效长度 $[L/(n\cdot R)]$ 的增加而增加。下面给出两种算法计算的一端固定一端自由的柱壳自振频率随柱壳长细比的变化曲线(图 1)和一端固定、一端简支柱壳自振

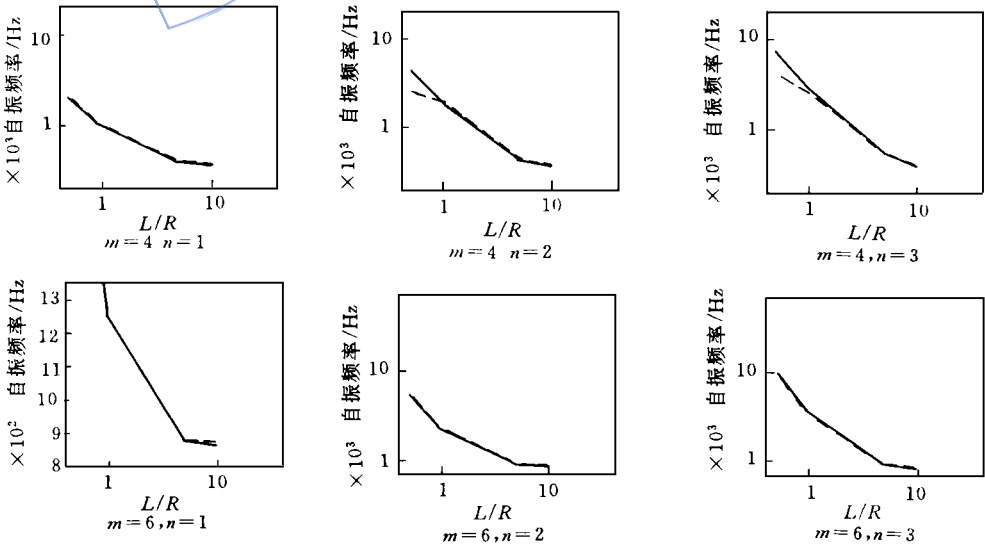


图 1 c_f 柱壳自振频率

频率随柱壳长细比的变化曲线(图 2)。图 1 及图 2 中, - - - 本文方法, —SHRAMA 方法。柱壳 $R = 50 \text{ cm}$, $h = 2.5 \text{ cm}$, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $\mu = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ kg/cm}^3$ 。

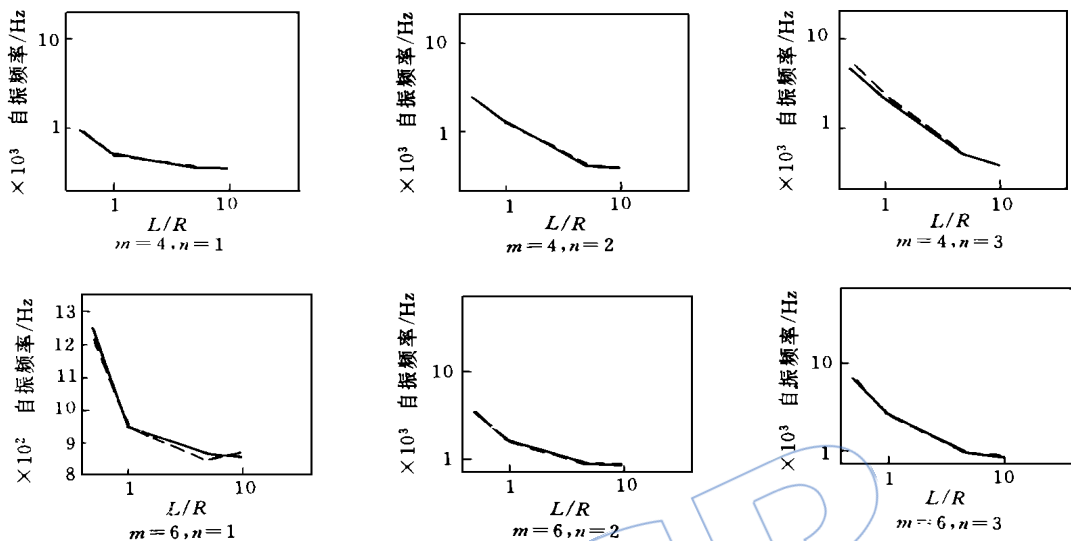


图 2 c_s 柱壳自振频率

从以上计算结果可看出: (1) 本文提出的方法, 可以给出不同边界条件的柱壳的固有频率。由于在求解过程中无任何假设, 所以解的精度与柱壳长细比无关, 与周波数无关, 无离散误差, 与两端简支柱壳解析解的比较说明, 这的确是一种广义的精确方法。(2) 对于长细比大于 5、小于 10 的柱壳, 用基于梁特征函数的近似方法求解, 其误差可达 10%, 当长细比大于 10 后, 误差减小至 2% 以下。

结论 给出了不同边界条件柱壳固有频率及振动模态的计算方法。从用数值法解梁的频率超越方程而得出梁自振频率精确解的意义上说, 这里提出的方法是精确方法。由于锥壳的运动方程与柱壳的运动方程有类似的形式, 最终也可写成 $d\{z\}/dx = [T]\{z\}$ 的形式, 因此本文提出的方法完全适用求解锥壳的振动问题。

参 考 文 献

- 1 晏砺堂等 结构系统动力特性分析 国防工业出版社, 1992
- 2 Robert D Blevins Formulas for Natural Frequency and Mode Shape Robert E Kieger Publishing Company 1979
- 3 Gupta R K. Free Vibrations of Cylindrical Containers J. of Sound and Vibration, 1995, 180: (3)

(责任编辑 魏星禄)

FULL - LENGTH PAPERS

SHAPE OPTM IZATION FOR CONTACT PROBLEM S W ITH BOUNDARY EL EM ENT METHOD

Shen Xiuli, Wen Weidong, Gao Deping

(2nd Dept Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

ABSTRACT An analytical method of shape optimization is put forward for two - dimensional elastic contact problems with boundary element method. Choice of the design variables and a method of shape description, as well as determination of target function and restrain conditions in two - dimensional elastic contact problems are considered. The numerical examples are carried out on the sensitivity and shape optimization. Furthermore, the shape optimization analysis of the the fir - tree tenon/mortise in an aeroengine is carried out.

Key Words Boundary element method Shapes Optimization Contact problems

AN EXACT SOLUTION FOR FREE VIBRATION OF TORO DAL THIN SHELL

Li Lin

(4th Dept Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT A new exact solution is developed which enables to determine the free vibration characteristics of toroidal thin shell with homogeneous boundary conditions. But the solution requires numerical evaluation of an eight order complex determinant to find its eigenvalues. The results are exact in the same sense as the numerical solution of the transcendental frequency equation for a beam yields an exact solution of its vibration frequency. The eigenvalues of cylindrical shell with the boundary conditions corresponding to simple - simple support (SS), clamped - free support (CF) and clamped - simple support (CS) have been calculated and their dependences on the slenderness of the shell have been found out yet. The results are compared with those obtained by other investigators using different methods and experiments.

Key Words Rotary shell Free vibration Characteristic values

NUMERICAL ANALYSIS OF BLADE TRANSIENT RESPONSES TO BIRD IMPACT UNDER CENTRIFUGAL LOADINGS

Chen Wei, Song Yingdong, Yin Jing, Gao Deping

(2nd Dept Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

ABSTRACT The integrative rigidity and the local rigidity of blades are enhanced by their centrifugal loading, so that when a flying bird impacts on the aeroengine blades under their rotating states, the responses of the blades are different from those under the static states. The nonlinear transient responses of the blades to the bird impact under the different centrifugal loadings are analyzed by using the finite element method. The results